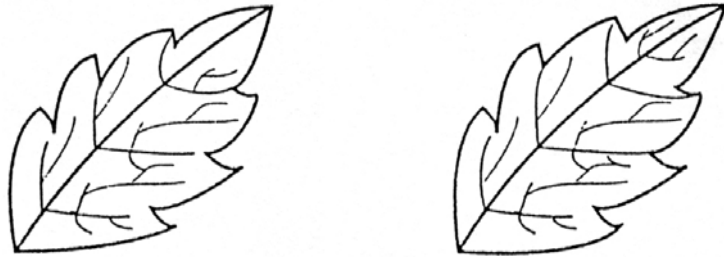


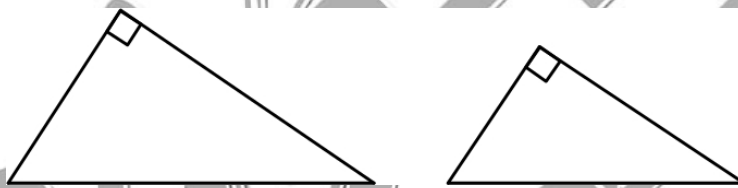
บทที่ 11 ความคล้าย

11.1 นิยาม ความคล้าย (Similarity)

ความคล้ายในทางคณิตศาสตร์จะความหมายต่างกับความคล้ายที่ใช้ในชีวิตประจำวันอยู่บ้าง ตัวอย่างเช่น ใบไม้สองใบนี้คล้ายกัน เราอาจหมายถึงว่าคล้ายกัน โดยลักษณะเป็นแฉก ๆ คล้ายกัน



หรือสามเหลี่ยม 2 รูปนี้คล้ายกัน โดยมองจากว่ามีมุมฉากเป็นลักษณะร่วมกัน



แต่ในทางคณิตศาสตร์จะยังไม่สรุปว่าสามเหลี่ยม 2 รูปนี้คล้ายกัน จนกว่าจะมีการตรวจสอบว่ามุมสองคู่ที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันเป็นคู่ ๆ จึงจะสรุปได้ว่าสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกัน แต่ถ้าตรวจสอบแล้วว่าพบว่ามีมุมสองคู่ที่เหลือไม่เท่ากัน ก็สรุปได้ว่าสามเหลี่ยมสองรูปนี้ไม่คล้ายกัน

11.2 ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยม

ในกรณีที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแสดงว่าสามเหลี่ยมสองรูปนั้นต้องมีมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่แล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัย ซึ่งได้แก่ ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน จะเท่ากันทุกอัตราส่วน โดยอัตโนมัติ ตัวอย่างเช่น

รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม PQR มี

มุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ 3 คู่ คือ $\widehat{A} = \widehat{P}$, $\widehat{B} = \widehat{Q}$ และ $\widehat{C} = \widehat{R}$ ด้านคู่ที่สมนัยกันได้แก่ \overline{AB} สมนัยกับ \overline{PQ} เพราะอยู่ตรงข้ามกับ \widehat{C} และ \widehat{R} ที่เท่ากัน, \overline{BC} สมนัยกับ \overline{QR} และ \overline{CA} สมนัยกับ \overline{PR}

$$\text{จะได้ } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$$

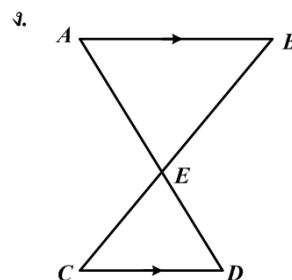
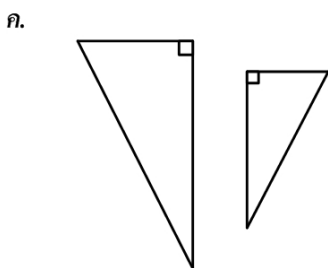
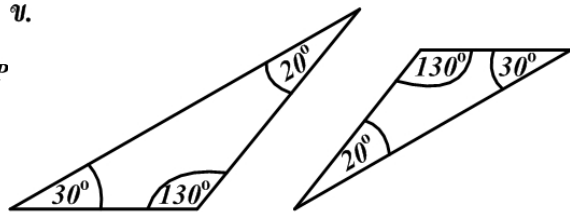
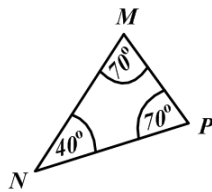
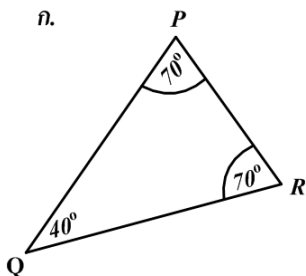
ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม PQR คล้ายกัน

11.3 รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน

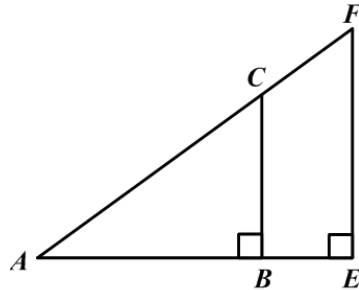
ลองทำดู

1. จงวงกลมรอบอักษรหน้าข้อที่แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ที่คล้ายกัน

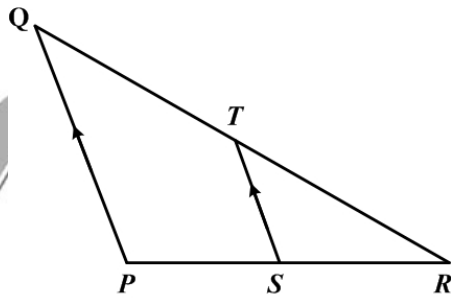


2. จงตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละคู่ที่กำหนดให้ต่อไปนี้คล้ายกันหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล

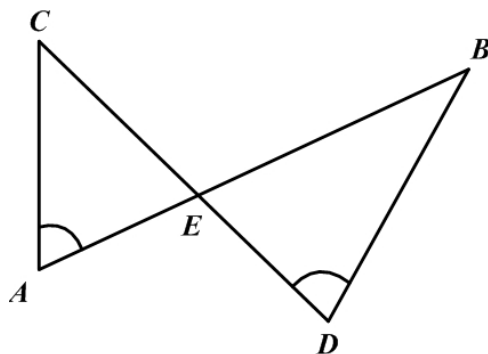
(1) รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม AEF เพราะมีมุมเท่ากัน 3 คู่ คือ



(2) รูปสามเหลี่ยม PRQรูปสามเหลี่ยม SRT เพราะ

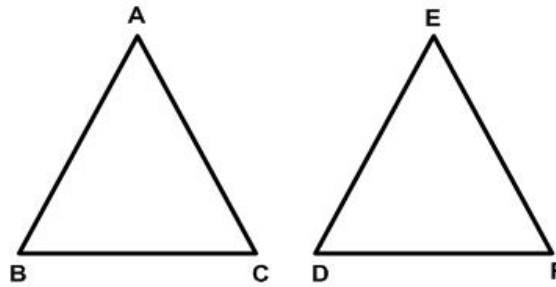


(3) รูปสามเหลี่ยม AEC รูปสามเหลี่ยม EBD เพราะ



11.4 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF พบว่ามีมุมเท่ากับ 3 คู่ ดังนั้น สามเหลี่ยม AEB ~ สามเหลี่ยม CED
จะได้อัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันเท่ากันดังนี้



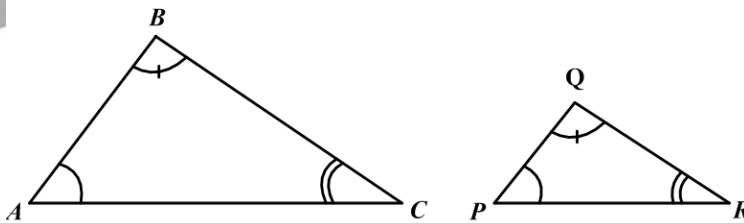
$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{ED} = \frac{BE}{CE}$$

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

หรือ

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน

กำหนดให้ สามเหลี่ยม ABC ~ สามเหลี่ยม PQR

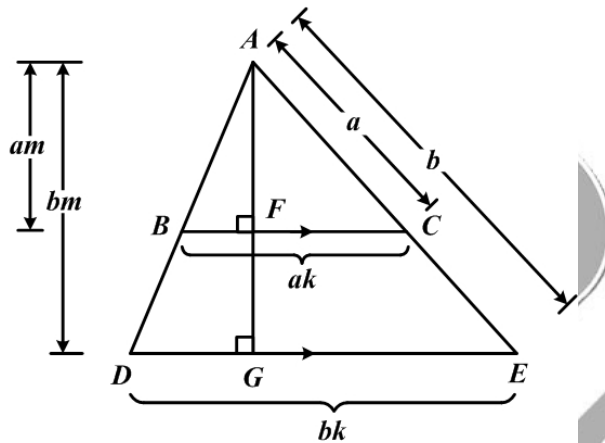


จากสามเหลี่ยมคล้ายกัน

$$\text{จะได้ } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้าใช้ด้านของสามเหลี่ยมใดเป็นตัวเลข ก็ต้องเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้น เป็นตัวเลขทุกอัตราส่วน ในทำนองเดียวกัน ตัวส่วนก็ต้องมาจากด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งเสมอ
2. ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน 2 รูปและอัตราของแต่ละด้านที่สมนัยกันมีค่าเท่ากับ $a : b$ จะได้อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากับ $a^2 : b^2$ ดังแสดงข้างล่างนี้



จากรูป พื้นที่ สามเหลี่ยม ABC

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (BC)(AF) \\
 &= \frac{1}{2} (ak)(am) ; k,m \text{ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ} \\
 &= \frac{1}{2} a^2 (km)
 \end{aligned}$$

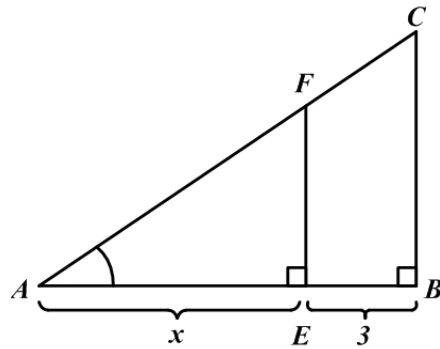
พื้นที่สามเหลี่ยม ADE

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (DE)(AG) \\
 &= \frac{1}{2} (bk)(bm) \\
 &= \frac{1}{2} b^2 (km)
 \end{aligned}$$

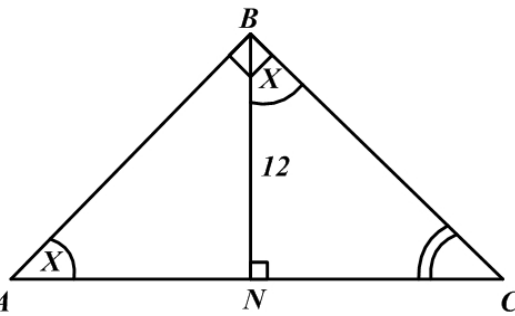
ดังนั้น $\frac{\text{พื้นที่}ABC}{\text{พื้นที่}ADE} = \frac{a^2}{b^2}$

ลองทำดู

1. จากรูป สามเหลี่ยม $ABC \sim$ สามเหลี่ยม AEF ถ้าอัตราส่วนของ $\frac{EF}{BC} = \frac{2}{3}$ และ $EB = 3$ หน่วย จงหาความยาวของ AE

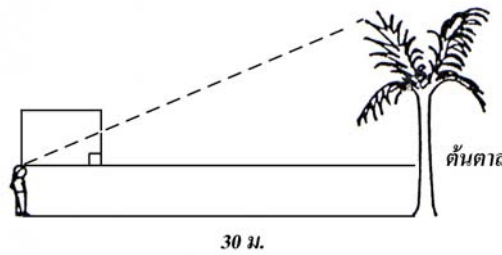


2. รูปสามเหลี่ยม ABC มุม ABC เป็นมุมฉาก BN ตั้งฉากกับ AC ที่จุด N , $BN = 12$ เซนติเมตร และ $NC = 16$ เซนติเมตร จงหาความยาวของ BC , AN และ AB

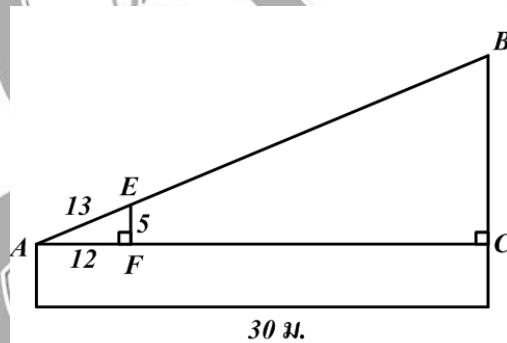


11.5 การนำไปประยุกต์ใช้

มะลิต้องการทราบว่าต้นตาลที่ในสวนต้นหนึ่งสูงเท่าไร เธอจึงลงเดินไปยังต้นตาลแล้วเดินออกจากต้นตาลออกมาพร้อมทั้งนับจำนวนก้าวไปด้วย เมื่อเดินมาห่างได้ 40 ก้าวเธอหยุดแล้วมองไปยังต้นตาลพบว่าจะต้องทำมุมองกับแนวระดับสายตาเป็นมุม α หนึ่งเธอจึงคิดว่าทำอย่างไรจะได้เครื่องมือมาช่วยคำนวณตรงนี้ได้ เธอคิดได้ว่าน่าจะใช้ประโยชน์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่เรียนมาช่วยได้ เธอจึงเริ่มนำกระดาษมาแผ่นหนึ่งให้ฐานของกระดาษขนานกับพื้นราบแล้วเล็งไปที่ยอดต้นตาลดังรูปใช้ดินสอขีดเส้นบนกระดาษให้ได้มุมพอดีที่จะตรงไปยังยอดมะพร้าว



เมื่อสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนกระดาษได้แล้วก็นำมาสร้างรูปเพื่อการคำนวณดังนี้ มะลิพบว่า 40 ก้าวของเธอประมาณ 30 เมตร และเธอสูง 150 เมตร



สามเหลี่ยม AEF ~ สามเหลี่ยม ABC

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

จะได้

$$\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

แทนค่า

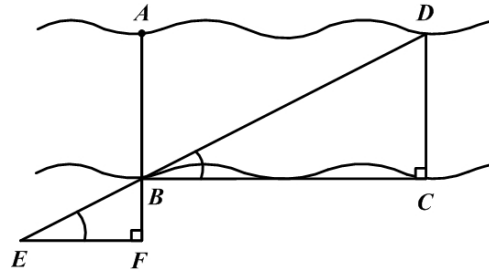
$$\frac{12}{30} = \frac{5}{BC}$$

$$BC = \frac{30 \times 5}{12} = 12.5$$

ดังนั้น ต้นตาลต้นนี้สูงประมาณ $12.5 + 1.5 = 14$ เมตร

ลองทำดู

1. จากรูป แม่น้ำสายหนึ่งมีความกว้างเท่ากับเท่าไรถ้า $EF = 12$ เมตร, $BC = 20$ เมตร และ $BF = 5$ เมตร



2. ชายคนหนึ่งอยู่ริมหาดมองเห็นเรือสองลำอยู่กลางทะเล เขาอยากทราบว่าเรือสองลำนั้นอยู่ห่างกันเท่าไร เขาจึงจำลองภาพดังรูป จากรูป $CD \parallel AB$ และ $AB = 10$ เมตร, $AE = 15$ เมตร และ $ED = 45$ เมตร

