

บทที่ 22 ระบบสมการเชิงเส้น

22.1 สมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

คือ สมการที่มีตัวแปร 2 ตัว เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็น 1 และไม่มีการคูณกัน หรือหารกันของตัวแปร 2 ตัว
เช่น $x + y = 7$, $5x - 4y = 3$, $7x - 5y = 2$

คำตอบของสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

คือ ค่า x, y ที่ทำให้สมการเป็นจริง เช่น $x + y = 5$ คำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม คือ

$$x = 0, y = 5;$$

$$x = 1, y = 4;$$

$$x = 2, y = 3;$$

$$x = 3, y = 2;$$

$$x = 4, y = 1;$$

$$x = -1, y = 6;$$

$$x = -2, y = 7 \dots$$

เมื่อนำเอาคำตอบของสมการเขียนเป็นคู่ลำดับ (x, y) จะได้คำตอบเป็น $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (-1, 6) \dots$

22.2 สรุปเกี่ยวกับกราฟของสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

รูปสมการทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ

$$ax + by + c = 0$$

กราฟของสมการเชิงเส้นเป็นกราฟเส้นตรง ทำโดย

- หาความชันของสมการเส้นตรงก่อน โดยความชัน $(m) = \frac{-a}{b}$
 - ถ้า $m > 0$ กราฟทำมุมแหลมกับแกน X
 - ถ้า $m < 0$ กราฟทำมุมป้านกับแกน X
 - ถ้า $m = 0$ กราฟจะขนานกับแกน X
- หาจุดตัดแกน $y = \frac{-c}{b}$ โดยสมการเส้นตรงจะตัดแกน y ที่จุด $(0, \frac{-c}{b})$
- หาจุดตัดแกน x โดยแทนค่า $y = 0$ ในสมการ จะได้จุดตัดแกน x ที่จุด $(x, 0)$

ตัวอย่างที่ 22.1 จงเขียนกราฟของสมการ $-5x + 3y = 4$

วิธีทำ จากสมการจัดรูปเป็นรูปทั่วไป จะได้ $-5x + 3y - 4 = 0$

จากสมการจะได้ $a = -5, b = 3,$ และ $c = -4$

ความชัน $= \frac{-(-5)}{3} > 0$ (ทำมุมแหลมกับแกน x)

หาจุดตัดแกน y โดยแทนค่า $x = 0$ จะได้ $-5(0) + 3y = 4$

$$y = \frac{4}{3}$$

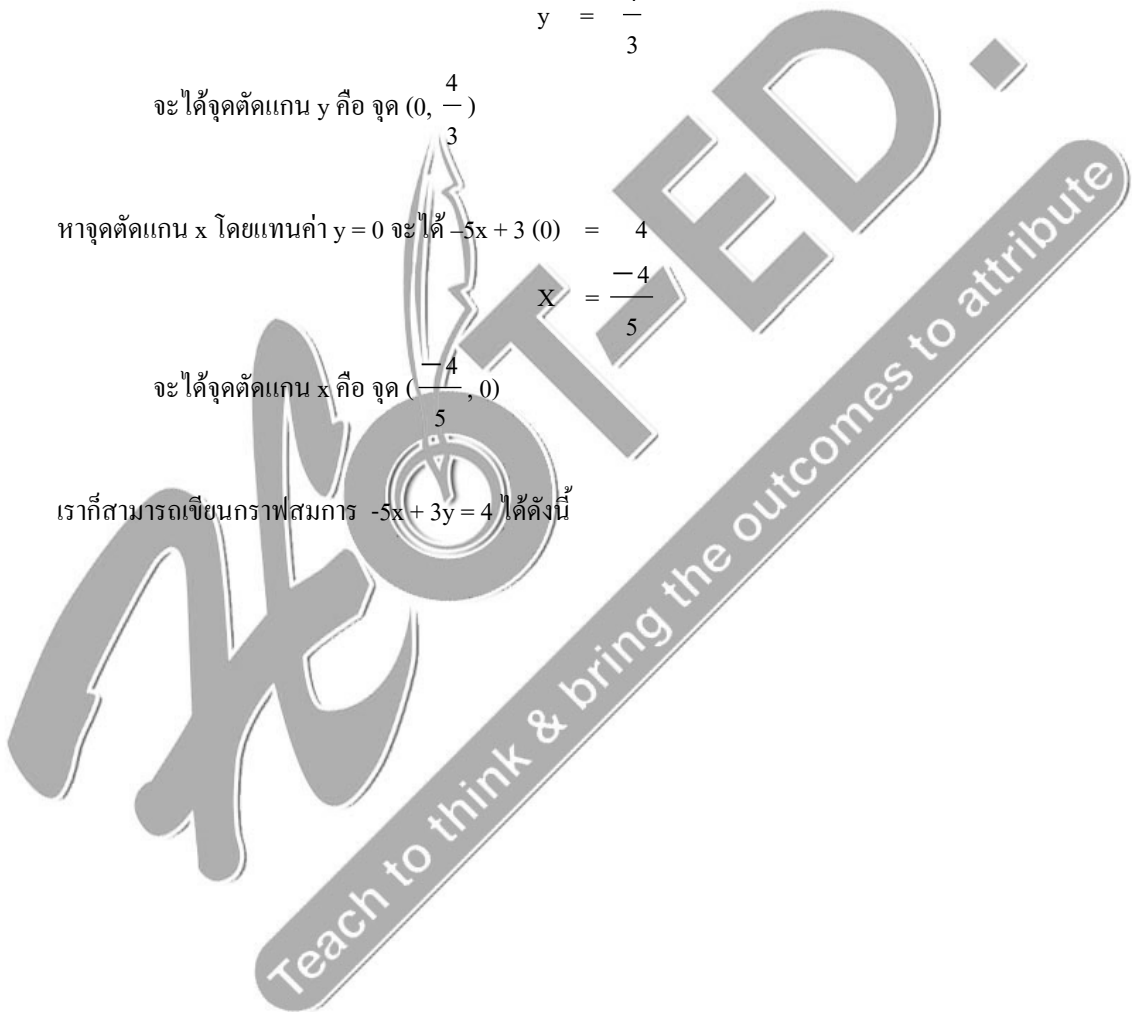
จะได้จุดตัดแกน y คือ จุด $(0, \frac{4}{3})$

หาจุดตัดแกน x โดยแทนค่า $y = 0$ จะได้ $-5x + 3(0) = 4$

$$x = \frac{-4}{5}$$

จะได้จุดตัดแกน x คือ จุด $(\frac{-4}{5}, 0)$

เราก็สามารถเขียนกราฟสมการ $-5x + 3y = 4$ ได้ดังนี้



สองทำดู

จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้ และหาความชัน จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y

1. $-3x + 2y = 7$
2. $3x + 2y = 9$
3. $-5x - 7y = -1$
4. $y = 3$
5. $x = -3$



22.3 หาสมการเส้นตรง

ถ้าโจทย์กำหนดจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y หรือจุดที่สมการผ่านมาให้เราก็คouldสามารถรู้สมการเส้นตรงได้ โดยหาความชัน

$$\text{จาก } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

และกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) จะมีสมการเป็น

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} &= m \\ \text{หรือ} \quad \frac{y - y_2}{x - x_2} &= m \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 22.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(15, -3)$ และ จุด $(-2, 4)$

วิธีทำ หาความชัน จาก $m = \frac{-3 - 4}{15 - (-2)}$

$$= \frac{-7}{17}$$

และกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุด $(15, -3)$ และ จุด $(-2, 4)$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{y - (-3)}{x - 15} = \frac{-7}{17}$$

คูณไขว้จะได้

$$17(y + 3) = -7(x - 15)$$

$$17y + 51 = -7x + 105$$

$$7x + 17y - 54 = 0$$

ลองทำดู

1. จงหาสมการที่ผ่านจุด $(-5, 3)$ กับ $(4, -1)$
2. จงหาสมการที่ผ่านจุด $(4, -2)$ กับ $(-3, -5)$
3. จงหาสมการที่ผ่านจุด $(-3, -1)$ กับ $(3, -1)$
4. จงหาสมการที่ผ่านจุด $(-1, -1)$ กับ $(2, -9)$
5. จงหาสมการที่ผ่านจุด $(-5, -9)$ กับ $(-1, 6)$
6. จงหาสมการที่ผ่านจุด $(-6, -7)$ กับ $(7, 5)$



22.4 ระบบสมการ

หมายถึง สมการหลาย ๆ สมการที่กำหนดไว้ในกลุ่มของสมการที่มีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว ถ้ามีตัวแปร 2 ตัว จะต้องมียังน้อย 2 สมการ จึงเป็นระบบที่พอหาคำตอบได้

ก. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแบบสองสมการ

$$ax + by + c = 0 \text{ ----- (1)}$$

$$dx + ey + f = 0 \text{ ----- (2)}$$

เมื่อ a, b, c, d, e และ f เป็นค่าคงตัว โดยที่ $(a \neq 0$ หรือ $b \neq 0)$ และ $(d \neq 0$ หรือ $e \neq 0)$

คำตอบของระบบสมการ (1) และ (2) จึงเป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงทั้งสองเส้นพร้อม ๆ กัน หรือ จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองนั่นเอง คำตอบของระบบสมการที่เป็นไปได้มี 3 กรณี คือ

1. เป็นระบบสมการที่ไม่มีคำตอบ เพราะเป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน เช่น $2x + 3y = 7$ กับ $2x + 3y = 9$
2. เป็นระบบสมการที่มีเพียงคำตอบเดียว (เป็นสมการเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน แล้วตัดกันเพียง 1 จุดเท่านั้น) เช่น $9x - 5y = 8$ กับ $4x + 3y = 2$
3. เป็นระบบสมการที่มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือ เป็นสมการที่สมมูลกัน (มีคำตอบเหมือนกันทั้งสองสมการ) คือ เป็นเส้นตรงเดียวกัน เช่น $6x - 5y = 3$ กับ $12x - 10y = 6$

ข. วิธีแก้ระบบสมการเชิงเส้น

หลักการ คือ พยายามกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งให้หมดไป เพื่อหาค่าตัวแปรตัวหนึ่งก่อนแล้วค่อยนำเอาค่าตัวแปรนั้นไปแทนค่าในสมการใดสมการหนึ่งเพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 22.3 จงแก้ระบบสมการ

$$3x + 5y = 33 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$4x - 3y = 15 \quad \text{-----} \quad (2)$$

วิธีทำ

เราจะกำจัดตัวแปร x ก่อนโดยเอาสมการที่ (1) คูณ 4 และเอาสมการที่ (2) คูณ 3 เพื่อให้สัมประสิทธิ์หน้า x เท่ากันคือเป็น 12

$$(1) \times 4 \quad 12x + 20y = 132 \quad \text{-----} \quad (3)$$

$$(2) \times 3 \quad 12x - 9y = 45 \quad \text{-----} \quad (4)$$

$$(3) - (4) \quad 29y = 87$$

$$\therefore y = 3$$

จากนั้นนำค่า $y = 3$ ไปแทนลงในสมการ (1) - (4) สมการใดก็ได้ เราเลือกสมการที่ (2) เนื่องจากตัวเลขน้อยจะสะดวกในการคำนวณกว่า

$$\text{จะได้} \quad 4x - 3(3) = 15$$

$$4x - 9 = 15$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

$$\text{ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ } (x, y) = (6, 3)$$

ตัวอย่างที่ 22.4 จงแก้ระบบสมการ

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{15}{4} \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y = 3 \quad \text{-----} \quad (2)$$

วิธีทำ ให้ทำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนเต็มก่อน เพื่อง่ายในการคำนวณ

$$(1) \times 4 \quad 6x - 3y = 15 \quad \text{-----} \quad (3)$$

$$(2) \times 3 \quad 4x - 5y = 9 \quad \text{-----} \quad (4)$$

ต่อมาเราจะกำจัดตัวแปร y ก่อน โดยเอาสมการที่ (3) คูณ 5 และเอาสมการที่ (4) คูณ 3 เพื่อให้สัมประสิทธิ์หน้า x เท่ากัน คือ เป็น -15

$$(3) \times 5 \quad 30x - 15y = 75 \quad \text{-----} \quad (5)$$

$$(4) \times 3 \quad 12x - 15y = 27 \quad \text{-----} \quad (6)$$

$$(5) - (6) \quad 18x = 48$$

$$\therefore x = \frac{48}{18}$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

จากนั้น นำค่า $x = \frac{8}{3}$ ไปแทนลงในสมการ (1)–(6) สมการใดก็ได้ที่เราเลือกสมการที่ (4) เนื่องจากตัวเลขน้อยจะสะดวก

ในการคำนวณกว่าจะได้ $12\left(\frac{8}{3}\right) - 15y = 27$

$$32 - 15y = 27$$

$$32 - 27 = 15y$$

$$y = \frac{5}{15}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$

ตัวอย่างที่ 22.5 จงแก้ระบบสมการ

$$2(x + 5) - (y - 1) - 4 = 0 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$5(y - 2) - 6x - 7 = 0 \quad \text{-----} \quad (2)$$

วิธีทำ จัดระบบสมการใหม่โดยการกระจายสัมประสิทธิ์เข้าไปในวงเล็บก่อน จะได้

$$\begin{aligned} \text{จาก (1)} \quad 2x + 10 - y + 1 - 4 &= 0 \\ 2x - y + 7 &= 0 \quad \text{-----} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก (2)} \quad 5y - 10 - 6x - 7 &= 0 \\ -6x + 5y - 17 &= 0 \quad \text{-----} \quad (4) \end{aligned}$$

เราจะกำจัดตัวแปร y ก่อน โดยเอาสมการที่ (3) คูณ 5

$$(3) \times 5 \quad 10x - 5y + 35 = 0 \quad \text{-----} \quad (5)$$

$$(4) + (5) \quad 4x + 18 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-18}{4}$$

จากนั้น นำค่า $x = \frac{-18}{4}$ ไปแทนลงในสมการ (1)–(5) สมการใดก็ได้ที่เราเลือกสมการที่ (3) เนื่องจากตัวเลขน้อยจะสะดวกในการคำนวณกว่าจะได้

$$2\left(\frac{-18}{4}\right) - y + 7 = 0$$

$$-9 - y + 7 = 0$$

$$y = -2$$

$$\text{ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ } (x, y) = \left(\frac{-18}{4}, -2\right)$$

ค. ระบบสมการดีกรีสอง

ระบบสมการดีกรีสอง จะมีรูปทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F &= 0 \\ Px + Qy + R &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ x, y เป็นตัวแปร และ A, B, C, D, E, F, P, Q และ R เป็นจำนวนจริง โดยที่ A, B, C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน P, Q ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

- สมการเชิงเส้นจะมีกราฟเป็นเส้นตรง
- ส่วนสมการดีกรีสองจะเป็นรูปพาราโบลา วงกลม วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา

ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองคำตอบของระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสอง คือ จุดตัดของกราฟของสมการดีกรีสอง ซึ่งอาจจะมี 1 จุด ถึง 4 จุด

รูปแบบการกระจายพจน์ที่ควรรู้ คือ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ตัวอย่างที่ 22.6 จงแก้ระบบสมการ $x + 2y = 10, x^2 + y^2 = 25$

วิธีทำ จัดรูป $x = ? y$ หรือ $y = ? x$ ก็ได้

$$\therefore x = 10 - 2y$$

แทนค่า x ในอีกสมการหนึ่ง จะได้

$$(10 - 2y)^2 + y^2 = 25$$

$$100 - 40y + 4y^2 + y^2 = 25$$

$$5y^2 - 40y + 75 = 0$$

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$(y - 3)(y - 5) = 0$$

$$\therefore y = 3, 5$$

แทนค่า $y = 3$ ในสมการ $x = 10 - 2y$ จะได้ $x = 10 - 2(3) = 4$

แทนค่า $y = 5$ ในสมการ $x = 10 - 2y$ จะได้ $x = 10 - 2(5) = 0$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(4, 3)$ และ $(0, 5)$

ลองทำดู

1. จงแก้ระบบสมการ $2x - y = 2, x^2 + 2y^2 = 12$
2. จงแก้ระบบสมการ $x^2 - xy - y^2 = 1, x + y = 1$
3. จงแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 73, x + y = 11$
4. จงแก้ระบบสมการ $x - 2y = 8, xy = 24$
5. จงแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 50, x + y = 6$
6. จงแก้ระบบสมการ $x^2 - 3y = 15, x - 2y = 7$
7. จงแก้ระบบสมการ $4x^2 - y = 3, 3x^2 - 2y = 1$
8. จงหาคำตอบของระบบสมการ $x^2 + y = 10, 9x^2 + y = 18$
9. จงแก้ระบบสมการ $3(xy - x) = 1, 3x(y + 2) = 7$
10. จงแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 8, xy = 4$
11. จงแก้ระบบสมการ $x^2 - y^2 = 2, x^2 + 2y^2 = 10$
12. จงแก้ระบบสมการ $x^2 + 4y^2 = 52, xy = 12$
13. จงแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 5, 2x^2 - 3y^2 = 5$
14. จงแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 25, x + y = 1$
15. กราฟของ $x^2 - 4y^2 = -7$ ตัดกับกราฟเส้นตรง $x - y = 1$ ที่จุดใด
16. จงหาจุดตัดของพาราโบลา $y = x^2 - 2x + 1$ และกราฟเส้นตรง $y + x = 3$ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงจุดตัด
17. จงหาค่าที่น้อยที่สุดของ $b - a$ เมื่อ (a, b) เป็นคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ $xy = 24$ และ $x - 3y = 6$
18. จงหาจุดตัดของกราฟ $x^2 - xy + y^2 = 57$ กับ $x - y = -1$
19. ผลต่างของเลขสองจำนวนมีค่าเท่ากับ 3 แต่ผลต่างกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าเท่ากับ 63 ผลคูณของเลขสองจำนวนนั้นเป็นเท่าใด
20. จงหาค่า k ที่ทำให้กราฟเส้นตรง $y - 2x = k$ ตัดกับพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุดเพียงจุดเดียว
21. ผลต่างของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปเท่ากับ 24 ตารางเซนติเมตร ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่น้อยกว่าสองเท่าของความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปเล็กอยู่ 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแต่ละรูป
22. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งเท่ากับ 400 ตารางเซนติเมตร และความยาวรอบรูปเท่ากับ 82 เซนติเมตร จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้
23. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งเท่ากับ 216 ตารางเซนติเมตร และความยาวรอบรูปเท่ากับ 60 เซนติเมตร จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้
24. เลข 2 จำนวนรวมกันได้ 14 แต่เมื่อนำแต่ละจำนวนมายกกำลังสอง แล้วบวกกันได้ 100 จงหาเลขสองจำนวนนั้น
25. จงหาจำนวนบวกสองจำนวนซึ่งผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 208 และผลต่างของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 80
26. จงหาจุดตัดของกราฟไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $3x^2 - 2y^2 = -38$ กับกราฟวงรีที่มีสมการเป็น $2x^2 + 3y^2 = 83$
27. จงหาคำตอบของระบบสมการ $3y^2 + 2x = 19$ และ $2y^2 - 7x = -4$

28. จงหาคำตอบของระบบสมการ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36}$ และ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$
29. จงแก้ระบบสมการ $2x^2 - 3y^2 = 6$ และ $x^2 + 3y^2 = 21$
30. จงหาค่าของ ab ที่เป็นจำนวนบวก เมื่อ (a, b) เป็นคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ $4y = x^2$ และ $y = x^2 - 3$
31. กำลังสองของเลขสองจำนวนเมื่อนำมารวมกันได้ 25 แต่ถ้านำเลขทั้งสองจำนวนมาคูณกันได้ 12 จงหาค่าของเลขสองจำนวนนั้น
32. จงหาจำนวนบวกสองจำนวนซึ่งผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 250 และผลต่างของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 200
33. จงหาจำนวนบวกสองจำนวนซึ่งผลบวกของจำนวนทั้งสองคูณด้วยผลต่างของจำนวนทั้งสองมีค่าเท่ากับ 40 และสามเท่าของผลบวกกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าเท่ากับ $\frac{267}{2}$
34. ผลคูณของจำนวนสองจำนวนเท่ากับ 216 ถ้าจำนวนที่มีค่ามากกว่าลดลง 1 และจำนวนที่มีค่าน้อยมีค่าเพิ่มขึ้น 1 ผลคูณของสองจำนวนที่ได้ในครั้งหลังเท่ากับ 221 จงหาจำนวนทั้งสองนี้

